

Egzamin pisemny z RRZw, 21.06.2023

G.Filipuk, N.Mokrzyński, T.Piasecki, P.Rybka, M.Szlenk, H.Żołądek

Egzamin trwa od 9:00 do 13:00, osoby uprawnione piszą do 14:00. W trakcie egzaminu studenci nie mogą komunikować się, ani korzystać z żadnych dodatkowych pomocy. Jedynym odstępstwem jest możliwość dwukrotnego zajrzenia do papierowego egzemplarza skryptu wykładu, który będzie udostępniony.

Ważne: Każde zadanie powinno być zapisane na osobnej kartce. Prosimy o staranne uzasadnianie odpowiedzi.

Zadanie 1. Rozwiązać zagadnienie początkowe

$$\ddot{x} = -\sin x, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 2.$$

Zadanie 2. Dla jakich rzeczywistych k i ω równanie

$$\ddot{x} + k^2x = \sin \omega t$$

ma co najmniej jedno rozwiązanie okresowe?

Zadanie 3. Wyznaczyć punkty stacjonarne następującego układu, zbadać ich stabilność, naszkicować portret fazowy,

$$\begin{aligned}x' &= x - y + 1, \\y' &= 2x + 2y - 5.\end{aligned}$$

Zadanie 4.

Rozważmy układ

$$\begin{aligned}x' &= y - xf(x, y), \\y' &= -x - yf(x, y).\end{aligned}$$

Zakładamy, że $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Wykazać, że jeśli $f > 0$, to punkt $(0, 0)$ jest stabilny, a nawet asymptotycznie stabilny.

Wskazówka: Przyda się jakaś funkcja Lapunowa.